Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Τετάρτη 16 Ιουνίου 2021

Προκειμένου να επεξεργαστείτε τα θέματα θα πρέπει να αντικατασταθούν οι παράμετροι α, β, γ ως ακολούθως:
α: ο αριθμός μητρώου σας
β: το πλήθος των χαρακτήρων του ονόματός σας
γ: το πλήθος των χαρακτήρων του επιθέτου σας
Απαντήσεις σε θέματα που δεν έχουν γίνει οι παραπάνω αντικαταστάσεις δεν θεωρούνται έγκυρες.

- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Να δοθεί λεπτομερής απάντηση στο Θέμα 1.

Στα θέματα 2-4 να επιλεγούν οι σωστές απαντήσεις και να αιτιολογηθούν.

- Η βαθμολογία κάθε θέματος διαμοιράζεται ισομερώς στις σωστές απαντήσεις.
- Η κατανομή του βαθμού που αντιστοιχεί σε κάθε σωστή απάντηση είναι 1/3 για την επιλογή και 2/3 για την (επαρκή) αιτιολόγηση.
- Λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται αρνητικά με $-0,3$.

1. Με χρήση της αντικατάστασης $t = x^k$ (όπου k είναι κατάλληλη πραγματική σταθερά που πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 4x^5 sin x^2, \quad x > 0.$$

2. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad (\lambda > 0). \tag{E_λ}$$

A) Για οποιοδήποτε $\lambda > 0$, οι λύσεις της εξίσωσης ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία.

B) Για δεδομένο (αυθαίρετο) $n \in \mathbb{N}^+$, η εξίσωση (E_{2n}) έχει (μη τετριμμένη) πολυωνυμική λύση βαθμού n.

C) Υπάρχουν $\lambda > 0$ για τα οποία η εξίσωση (E_λ) δεν έχει πολυωνυμική λύση.

D) Για $\lambda := \alpha$ η εξίσωση έχει (μη τετριμμένη) πολυωνυμική λύση.

E) Για $\lambda_1 := \alpha + \frac{1-(-1)^\alpha}{2}$ η εξίσωση έχει (μη τετριμμένη) πολυωνυμική λύση.

F) Δεν υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο η εξίσωση (E_λ) έχει βασικό σύνολο λύσεων που απαρτίζεται από πολυώνυμα.

G) Υπάρχει θετική συνάρτηση w ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε οποιεσδήποτε (μη τετριμμένες) πολυωνυμικές λύσεις της (E_λ) που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του λ να είναι ορθογώνιες ως προς την w στο $\mathbb{R}$.

H) Κανένα από τα προηγούμενα.

3. Θεωρούμε τις λύσεις y της εξίσωσης

$$y''(t) = \beta y'(t) - 2\gamma y(t)y'(t), \quad t \geq 0. \tag{E}$$

που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$y'(0) = \beta y(0) - \gamma y^2(0), \quad y(0) = k > 0.$$

A) Για οποιοδήποτε $k > 0$ υπάρχει ακριβώς μία λύση y της (E) με $y(0) = k > 0$ και η λύση αυτή ορίζεται σε ολόκληρο τον θετικό ημιάξονα.

B) Υπάρχουν γνήσια αύξουσες λύσεις y της εξίσωσης με $y(0) = k > 0$.

C) Κάθε λύση y με $y(0) = k > 0$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό για $t \to +\infty$.

D) Η λύση y της εξίσωσης με $y(0) = \gamma$ είναι φθίνουσα.

E) Αν y_1, y_2 είναι δυο λύσεις της εξίσωσης (E) με $0 < y_1(0) = k_1 < k_2 = y_2(0)$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των y_1, y_2 δεν έχουν κοινά σημεία.

F) Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης (E) με $y(0) = \beta$.

G) Κανένα από τα προηγούμενα.

4. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$x^2 y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(1) = 0 = y(T), \quad x \in [0, T], \quad (1 < T). \tag{S_μ}$$

A) Για $\mu = 1$, το π.α.τ. (S_1) έχει (μη τετριμμένη) λύση για οποιοδήποτε $T > 1$.

B) Για $\mu = 1$, το π.α.τ. (S_1) έχει (μη τετριμμένη) λύση για $T = \alpha$.

C) Για $T = \alpha$, υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\mu > 1$ για τους οποίους το π.α.τ. (S_μ) έχει (μη τετριμμένη) λύση.

D) Για $\mu = \alpha$ υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος θετικών αριθμών $T > 1$ για τους οποίους το π.α.τ. (S_μ) έχει (μη τετριμμένη) λύση.

E) Κανένα από τα προηγούμενα.